# Induktioperiaate

LuK-tutkielma
Jialiang Sun
2504274
Matematiikan tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
Syksy 2018

# Sisältö

# Johdanto

Tässä tutkielmassa käyn läpi kaksi induktiotodistuksen periaatetta. Ensimmäisessä osiossa käyn aluksi läpi Matemaattista induktiota sekä siihen liittyvää periaatetta, aksioomaa ja aksioomaan liittyvää todistusta. Tämän jälkeen näytän esimerkkien avulla, miten Matemaattinen induktio käytännössä toimii. Toisessa osiossa käyn myös lyhyesti läpi Vahvan induktiotodistuksen periaatetta, aksioomaa ja aksiooman todistusta. Osion lopussa käyn läpi esimerkkien avulla, miten Vahva induktio toimii.

# 1 Matemaattinen induktio

Induktiotodistus on työkalu osoittaa, että jokin tulos on voimassa kaikilla kokonaisluvuilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Induktiotodistus on kaksivaiheinen. Ensimmäinen vaihe on todistaa, että tilanteessa $n = 1$ tulos toteutuu. Toisessa vaiheessa oletetaan, että tulos on voimassa jollekin kokonaisluvulle $m$, ja pyritään osoittamaan, että tulos on voimassa myös seuraavalla kokonaisluvulla $m + 1$.

Tämä todistustapa perustuu siihen, että jos tiedetään tuloksen toteutumisesta kokonaisluvulla $m$ seuraavan aina tuloksen toteutuminen kokonaisluvulla $m + 1$, niin tiedosta että tulos toteutuu arvolla 1, seuraa tuloksen voimassaolo kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla.
Helpommin tämän ymmärtää, jos ajatellaan tämä dominoefektinä. Eli kaadetaan ensimmäinen kortti, toinen kortti varmasti kaatuu ja kaatuminen jatkuu viimeiseen korttiin asti. Näin voidaan päätellä, että jos ensimmäinen kortti ja toinen kortti kaatuu niin kaikki kortit kaatuvat.

Tiivistetään edellä mainitut asiat seuraavissa lauseissa.

**Lause 1.1.** *(Matemaattinen induktio)*
*Olkoon joukko $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ ja oletetetaan, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

*(1) $1 \in A$,*

*(2) Jos $k \in A$, niin myös $k + 1 \in A$.*

*Tällöin joukko $A = \mathbb{Z}_+$.*

*Todistus.* Olkoon $A$ joukko, joka koostuu joistakin positiivisista kokonaisluvuista. Lisäksi joukko $A$ sisältää luvun 1 ja aina, kun joukkoon $A$ sisältyy luku $k$, niin myös $k + 1$ sisältyy joukkoon $A$.
Tehdään antiteesi: Oletetaan, että joukko $A$ ei koostu kaikista positiivisista kokonaisluvuista. Tällöin $A \neq \emptyset$ ja on olemassa pienin positiivinen kokonaisluku $n$, joka ei kuulu joukkoon $A$.
Huomataan, että $n \neq 1$, koska 1 kuuluu joukkoon $A$. Tästä seuraa, että luvun $n$ on pakko olla suurempi kuin 1, koska ei ole olemassa lukua 1 pienempää positiivista kokonaislukua. Nyt koska $n$ on pienin positiivinen kokonaisluku, joka ei ole joukossa $A$, niin luku $n-1$ kuuluu joukkoon $A$. Koska $n-1$ kuuluu joukkoon $A$, niin oletuksen nojalla myös $(n - 1) + 1 = n$ kuuluu joukkoon $A$. Mikä on ristiriita.
Näin ollen antiteesi on väärin ja väite on oikein. $\square$

Aksiooma johtaa meitä seuraavaan Induktioperiaatteen lauseeseen.

**Lause 1.2.** *(Induktioperiaate)*
*Olkoon $P(n)$ positiivisia kokonaislukuja $n$ koskeva väite ja oletetetaan, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

*(1) P(1) toteutuu,*
*(2) Jos $P(m)$ toteutuu niin myös $P(m+1)$ toteutuu.*

*Tällöin väite $P(n)$ toteutuu kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Kun käytetään Induktioperiaatetta todistukseen, osoitetaan ensin, että $P(1)$ toteutuu. Tätä kutsutaan **perusaskeleeksi**.
Sen jälkeen seuraa **induktioaskel**, joka muodostuu **induktio-oletuksesta** ja **induktiotodistuksesta**. Induktio-oletuksessa oletetaan, että $P(m)$ toteutuu, ja induktiotodistuksessa todistetaan, että myös $P(m+1)$ toteutuu.

**Esimerkki 1.3.** Olkoon meillä pussi, jossa on tietty määrä palloja. Me saamme aina päätelmän palloista, kun kaikki pallot on otettu ulos. Miten tehdään johtopäätös, kun palloja on loputtomasti? Nyt voidaan käyttää induktioperiaatetta. Tehdään oletus:"jos nostettu pallo on punainen, niin seuraava pallo on varmasti punainen". Näin ollen, jos ensimmäinen pallo on punainen, niin seuraavat pallot ovat varmasti punaisia. Voidaan tehdä johtopäätös, että kaikki pussissa olevat pallot ovat punaisia. Tämä päättely perustui Induktioperiaatteeseen.

**Esimerkki 1.4.** Todistetaan induktioperiaatteella, että

$$1+2+3+....+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

1) Perusaskel

Osoitetaan ensin, että väite toteutuu arvolla $n = 1$.
Yhtälön vasemmalla puolella on tällöin 1 ja oikealle puolelle saadaan termi

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Nyt

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

eli väite on tosi arvolla $n = 1$.

2) Induktio-oletus

Oletetaan, että väite tosi jollakin arvolla $n = m$, eli

$$1 + 2 + 3 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

3) Induktiotodistus

Osoitetaan, että väite toteutuu arvolla $n = m + 1$, eli osoitetaan

$$1 + 2 + 3 + ... + m + (m+1) = \frac{(m+1)[(m+1)+1]}{2}.$$

Induktio-oletuksen nojalla

$$1 + 2 + 3 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Lisätään sitten $m + 1$ molempiin puoliin ja saadaan

$$1 + 2 + 3 + ... + m + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1).$$

Nyt

$$\frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2(m+1)}{2} = \frac{(m+2)(m+1)}{2}.$$

Saadaan siis

$$1 + 2 + 3 + ... + m + (m+1) = \frac{(m+1)[(m+1)+1]}{2}$$

eli väite toteutuu myös arvolla $n = m + 1$.

Induktioperiaatteen nojalla voidaan päätellä, että väite toteutuu kaikilla arvoilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

**Esimerkki 1.5.** Todistetaan induktion avulla, että

$$n! \leq n^n$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

1) Perusaskel

Osoitetaan ensin, että väite toteutuu arvolla $n = 1$.
Nyt
$$1! = 1 \leq 1 = 1^1,$$
eli väite on tosi arvolla $n = 1$.

2) Induktio-oletus

Oletetaan, että väite tosi jollakin arvolla $n = m$, eli
$$m! \leq m^m.$$

3) Induktiotodistus

Osoitetaan, että väite toteutuu arvolla $n = m + 1$, eli osoitetaan
$$(m+1)! \leq (m+1)^{m+1}.$$
Nyt
$$(m+1)! = (m+1) \cdot m!$$
ja Induktio-oletuksen nojalla
$$m! \leq m^m.$$
Näin ollen
$$(m+1)! = (m+1) \cdot m! \leq (m+1) \cdot m^m.$$
Selvästi
$$m^m \leq (m+1)^m.$$
Edelliset yhdistämällä saadaan
$$(m+1)! \leq (m+1) \cdot m^m \leq (m+1) \cdot (m+1)^m = (m+1)^{m+1}$$
eli
$$(m+1)! \leq (m+1)^{m+1}.$$
Näin ollen väite toteutuu myös arvolla $n = m + 1$.

Induktioperiaatteen nojalla voidaan päätellä, että väite toteutuu kaikilla arvoilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

**Esimerkki 1.6.** Tarkastellaan lukuja

$$1 = 1,$$
$$1 + 3 = 4,$$
$$1 + 3 + 5 = 9,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

ja huomaamme, että lukujono toteuttaa yhtälön

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

Lähdemme nyt todistamaan sitä.

1) Perusaskel

Osoitetaan ensin, että väite toteutuu kun $n = 1$. Nyt

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1^2$$

eli lause toteutuu kun $n = 1$.

2) Induktio-oletus

Oletetaan, että väite tosi jollakin arvolla $n = m$, eli

$$\sum_{i=1}^{m}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2m-1) = m^2.$$

3) induktiotodistus

Lopuksi osoitetaan, että lauseke toteutuu kun $n = m + 1$.

Induktio-oletuksen nojalla

$$\sum_{i=1}^{m}(2i-1) = m^2.$$

Nyt saadaan

$$\sum_{i=1}^{m+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{m}(2i-1) + [2(m+1)-1] =$$

$$m^2 + 2(m+1) - 1 = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2.$$

Väite siis toteutuu arvolla $n = m + 1$.

Induktioperiatteen nojalla väite toteutuu kaikkilla $m \in \mathbb{Z}_+$.

**Määritelmä 1.7.** Olkoon $a, r \in \mathbb{R}$. Jos on olemassa jono $a, ar, ar^2, ar^3, ....,$ niin tällaista jonoa kutsutaan *geometriseksi jonoksi*. Tällöin luku $a$ on *alkutermi* ja luku $r$ on *suhdeluku*.

**Esimerkki 1.8.** Jono $6, -18, 54, -162, ...$ on geometrinen jono, jossa $a = 6$ on alkutermi ja $r = -3$ on termien välinen suhdeluku.

**Esimerkki 1.9.** Olkoon $a, r \in \mathbb{R}$ ja $r \neq 1$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ toteutuu

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Todistetaan tämä induktioperiaattella.

1) Perusaskel

Osoitetaan ensin, että väite toteutuu kun $n = 1$.
Nyt vasemmalla puolella on

$$\sum_{j=0}^{1} ar^j = ar^0 + ar^1 = a + ar$$

ja oikealta puolelta saadaan

$$\frac{ar^{1+1} - a}{r - 1} = \frac{ar^2 - a}{r - 1} = \frac{a(r^2 - 1)}{r - 1} =$$
$$\frac{a(r-1)(r+1)}{r - 1} = a(r + 1) = a + ar.$$

Siis väite on voimassa, kun $n = 1$.

2) Induktio-oletus

Tehdään oletus, että väite on voimassa arvolla $n = m$. Eli

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^m = \frac{ar^{m+1} - a}{r - 1}.$$

3) Induktiotodistus

Lopuksi osoitetaan, että lauseke toteutuu kun $n = m + 1$.
Nyt pitää todistaa, että

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^m + ar^{m+1} = \frac{ar^{(m+1)+1} - a}{r - 1} = \frac{ar^{m+2} - a}{r - 1}.$$

Lisätään induktio-oletuksen molemmille puolille $ar^{m+1}$ , josta saadaan

$$(a + ar + ar^2 + ... + ar^m) + ar^{m+1} = \frac{ar^{m+1} - a}{r - 1} + ar^{m+1}.$$

Näin ollen

$$\sum_{j=0}^{m+1} ar^j = \frac{ar^{m+1} - a}{r - 1} + ar^{m+1} = \frac{ar^{m+1} - a}{r - 1} + \frac{(ar^{m+1})(r - 1)}{r - 1} =$$
$$\frac{ar^{m+1} - a}{r - 1} + \frac{ar^{m+2} - ar^{m+1}}{r - 1} = \frac{ar^{m+1} - a + ar^{m+2} - ar^{m+1}}{r - 1} =$$
$$\frac{ar^{m+2} - a}{r - 1} = \frac{ar^{(m+1)+1} - a}{r - 1}.$$

Väite siis toteutuu arvolla $n = m + 1$.

Induktioperiatteen nojalla väite toteutuu kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

**Esimerkki 1.10.** Käytetään edellistä esimerkkiä hyväksi arvoilla $a = 1$ ja $r = 2$, saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = \frac{2^{(n+1)} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

# 2 Vahva induktio

Nyt esittelemme toisen induktioperiaatteen, eli Vahva induktio.

**Lause 2.1.** *(Vahva matemaattinen induktio)*
*Olkoon joukko $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ ja oletetetaan, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

*(1)* $1 \in A$,
*(2) Jos* $1, 2, ..., k \in A$, *niin myös* $k+1 \in A$.

*Tällöin joukko* $A = \mathbb{Z}_+$.

*Todistus.* Olkoon $A$ joukko, joka koostuu joistakin kokonaisluvuista. Lisäksi joukko $A$ sisältää luvun 1 ja aina, kun joukkoon $A$ sisältyy kaikki positiiviset kokonaisluvut $1, 2, ..., k$, niin myös $k+1$ sisältyy joukkoon $A$.
Olkoon $B$ sellaisten positiivisten kokonaislukujen $n$ joukko, että kaikki positiiviset kokonaisluvut $a$, jotka on pienempiä tai yhtäsuuria kuin luku $n$, ovat joukossa $A$. Selvästi luku 1 on joukossa $B$. Joukon $A$ oletuksen perusteella nähdään, että jos luku $n$ on joukossa $B$ niin myös luku $n+1$ on joukossa $B$. Lauseen 1.1 nojalla, on joukko $B$ sama kuin positiivisten kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}_+$, eli $B = \mathbb{Z}_+$. Selvästi joukko $B$ on joukon $A$ osajoukko, eli $B \subseteq A$. Toisaalta $A \subseteq Z_+$. Näin ollen $A = \mathbb{Z}_+$. □

Aksiooma johtaa meitä seuraavaan lauseeseen.

**Lause 2.2.** *(Vahva induktioperiaate)*
*Olkoon* $P(n)$ *positiivisia kokonaislukuja* $n$ *koskeva väite ja oletetetaan, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

*(1) P(1) toteutuu,*
*(2) Jos* $P(n)$ *toteutuu, kun* $n = 1, 2, ..., m$, *niin myös* $P(m+1)$ *toteutuu.*

*Tällöin väite* $P(n)$ *toteutuu kaikilla* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Kun käytetään Vahvaa induktioperiaatetta todistukseen, osoitetaan ensin, että $P(1)$ toteutuu. Tätä kutsutaan **perusaskeleeksi**.
Sen jälkeen seuraa **induktioaskel**, joka muodostuu **induktio-oletuksesta** ja **induktiotodistuksesta**. Induktio-oletuksessa oletetaan, että $P(n)$ toteutuu, kun $n \leqslant m$ . Induktiotodistusvaiheessa todistetaan, että myös $P(m+1)$ toteutuu.

**Esimerkki 2.3.** Todista, että jos $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $n \geq 2$, niin $n$ voidaan esittää alkulukujen tulona. Tehdään todistus vahvalla induktioperiaatteella.

1) Perusaskel

Osoitetaan ensin, että väite toteutuu kun $n = 2$. Luku 2 voidaan esittää alkulukujen tulona, jossa on yksi alkulukutekijä alkuluku 2

2) Induktio-oletus

Oletetaan, että väite on tosi kaikille positiivisille kokonaisluvuille $n$, kun $2 \leq n \leq m$.

3) Induktiotodistus

Osoitetaan, että väite toteutuu arvolla $n = m + 1$.
Jos $m + 1$ on alkuluku, niin väite on tosi.
Jos $m + 1$ on yhdistetty luku, niin $m + 1 = v \cdot u$, missä yhdistetyn luvun määritelmän mukaisesti $1 < v < m + 1$ ja $1 < u < m + 1$. Induktio-oletuksen nojalla luvut $v$ ja $u$ voidaan esittää alkulukujen tulona. Näin ollen myös luku $m + 1 = v \cdot u$ voidaan esittää alkulukujen tulona.

Induktioperiatteen nojalla väite toteutuu kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, kun $n \geq 2$.

# Viitteet

[1] Kenneth H. Rosen: *Elementary Number Theory and its Applications.* Addison-Wesley publishing company, Reading, Massachusetts - Menlo Park, California - New York, Don Mills, Ontario - Wokingham, England - Amsterdam - Bonn - Sydney - Singapore - Tokyo - Madrid - San Juan - Milan - Paris, 1993.