Polynomit

LuK-tutkielma

Mauno Hepola 1191015

Matemaattisten tieteiden laitos

Oulun yliopisto

Syksy 2018

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään polynomeja osana algebraa. Esitietoina tutkielma edellyttää sen verran algebran tuntemusta, että ainakin renkaat, kokonaisalueet ja kunnat ovat tuttuja.

Asian pääkäsittely on luvussa 2, joka jakautuu viiteen alalukuun.

Aluksi määritellään polynomi lukujonoksi, jossa on äärellinen määrä nollasta eroavia kertoimia.

Toisessa alaluvussa tarkastellaan polynomin astetta. Siinä yhteydessä määritellään myös polynomien yhteen- ja kertolasku sekä tehdään päätelmiä summa- ja tulopolynomien asteista. Asiaa selvennetään esimerkein ja kertolaskukaava johdetaan hieman toisin kuin lähdeteoksessa.

Seuraavaksi on vuorossa polynomin perinteisen ja lukujonoesitysmuodon rinnastaminen. Aluksi määritellään, millainen x on lukujonona, ja samastetaan joukon R alkiot lukujonojen kanssa. Voidaan todeta, että lukujonopolynomi on sama kuin summapolynomi, silloin kun niiden kertoimet vastaavat toisiaan.

Vielä esitellään lyhyesti polynomirengas $R[x]$ eli kaikkien niiden polynomien joukko, jotka renkaassa R voidaan muodostaa. Polynomirenkaan osoitetaan täyttävän kommutatiivisen renkaan ehdot ja sisältävän renkaan R alirenkaana. Todistus esitetään tarkemmin kuin lähdeteoksessa.

Viimeisessä osassa näytetään, että polynomien algebraa voi laajentaa moneenkin suuntaan, esimerkiksi rationaalifunktioiden kuntaan ja usean muuttujan polynomeihin. Näitä tutkielmassa ei kuitenkaan laajemmin käsitellä.

Tutkielmassa on käytetty lähteenä Joseph J. Rotmanin teosta **A First Course in Abstract Algebra**, 2. p.[1]. Siinä käsitellään polynomeja sivuilla 225 - 231.

Luku 2

Polynomit

2.1 Polynomi lukujonona

Polynomeja on käytetty jo peruskoulun ja lukion matematiikassa. Yhden muuttujan polynomi $p(x)$ on summa

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i,$$

jossa lasketaan yhteen muuttujan potensseja kukin omalla kertoimellaan varustettuna.

Algebrassa polynomien määrittelemiseen voidaan lähteä toisesta suunnasta. Ensin määritellään lukujono, jonka alkioita kutsutaan tässä yhteydessä kertoimiksi, tuttua polynomia ajatellen.

Määritelmä 2.1.1. Olkoon R kommutatiivinen rengas. **Lukujono** σ renkaassa R on $\sigma = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots)$, missä $s_i \in R$ kaikilla $i \geq 0$. Lukujonon alkioita s_i kutsutaan **kertoimiksi**. Kaksi lukujonoa σ ja τ ovat identtiset, jos ja vain jos niiden vastinkertoimet ovat pareittain yhtäsuuria. Jos siis $\sigma = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots)$ ja $\tau = (t_0, t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots)$, niin $\sigma = \tau$ täsmälleen silloin, kun $s_i = t_i$ kaikilla $i \geq 0$.

Määritelmä 2.1.2. Lukujonoa σ kommutatiivisessa renkaassa R kutsutaan **polynomiksi**, jos on olemassa luonnollinen luku m, siten että $s_i = 0$ aina, kun $i > m$. Polynomi on siis muotoa $\sigma = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_m, 0, 0, \ldots)$. Polynomi on lukujono, jossa on äärellinen määrä nollasta eroavia kertoimia. Jos tämä määrä on enintään yksi, siten että $s_i = 0$, kun $i \geq 1$, polynomia sanotaan **vakiopolynomiksi**: $\sigma = (s_0, 0, \ldots)$. Polynomia, jonka kaikki kertoimet ovat nollia, kutsutaan **nollapolynomiksi** ja sille voidaan käyttää merkintää $\sigma = 0$.

2.2 Polynomin aste

Määritelmä 2.2.1. Olkoon $\sigma = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, 0, 0, \ldots) \neq 0$ polynomi. Jos on olemassa sellainen luonnollinen luku $n \geq 0$, että $s_n \neq 0$ ja $s_i = 0$ aina, kun $i > n$, niin polynomin **asteeksi** asetetaan n. Nollapolynomin asteeksi voidaan asettaa $-\infty$[1]. Asteelle käytetään merkintää $\deg(\sigma)$. Kerroin s_n on polynomin σ **johtava kerroin**.

Esimerkki 2.2.2. *Olkoot $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, \ldots)$ ja $\tau = (6, 7, 8, 0, 0, \ldots)$ polynomeja. Nyt polynomin σ johtava kerroin $s_4 = 5$ ja deg(σ) $= 4$ sekä polynomin τ johtava kerroin $t_2 = 8$ ja deg(τ) $= 2$.*

Polynomien yhteenlasku voidaan määritellä kertoimien yhteenlaskuksi vastinpareittain, jolloin se vastaa kertoimien käyttäytymistä perinteisen määritelmän mukaisia polynomeja yhteenlaskettaessa.

Määritelmä 2.2.3. Olkoot $\sigma = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, 0, 0, \ldots)$ ja $\tau = (t_0, t_1, t_2, \ldots, t_m, 0, 0, \ldots)$ polynomeja. Niiden summapolynomi $\sigma + \tau = (s_0 + t_0, s_1 + t_1, s_2 + t_2, \ldots)$.

[1]Rotmanin kirjassa ei kuitenkaan tätä merkintää käytetä, vaan todetaan, ettei nollapolynomilla ole astetta ollenkaan.

Esimerkki 2.2.4. *Käytettäessä esimerkin* 2.2.2 *polynomeja*

$$\begin{aligned}
\sigma + \tau &= (1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, \ldots) + (6, 7, 8, 0, 0, \ldots) \\
&= (1 + 6, 2 + 7, 3 + 8, 4 + 0, 5 + 0, 0, 0, \ldots) \\
&= (7, 9, 11, 4, 5, 0, 0, \ldots).
\end{aligned}$$

Tässä tapauksessa $deg(\sigma + \tau) = 4 = deg(\sigma)$*.*

Yleisesti $\deg(\sigma+\tau) \leq \max[\deg(\sigma), \deg(\tau)]$, sillä molemmissa polynomeissa kertoimen arvo on nolla, kun i $>$ $\max[\deg(\sigma), \deg(\tau)]$. Aste voi alentua yhteenlaskettavien polynomien asteista, sillä sama-asteisissa polynomeissa johtavat kertoimet voivat olla toistensa vastalukuja, jolloin summaksi tulee nolla. Jos kaikki kertoimet ovat pareittain toistensa vastalukuja, summapolynomista tulee nollapolynomi, jonka aste on $-\infty$.

Perinteiset polynomit voidaan myös kertoa keskenään. Lukujonopolynomien kertolasku on syytä määritellä niin, että tulo vastaa perinteisen tulon kertoimia.

Olkoot $\sigma = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \ldots + s_nx^n$ ja $\tau = t_0 + t_1x + t_2x^2 + \ldots + t_mx^m$. Silloin $\sigma\tau = (s_0 + s_1x + s_2x^2 + \ldots + s_nx^n)(t_0 + t_1x + t_2x^2 + \ldots + t_mx^m) =$

$$\begin{array}{llllll}
s_0t_0 & + s_0t_1x & + s_0t_2x^2 & + \ldots & + s_0t_mx^m & \\
 & + s_1t_0x & + s_1t_1x^2 & + \ldots & + s_1t_{m-1}x^m & + \ldots \\
 & & + s_2t_0x^2 & + \ldots & + s_2t_{m-2}x^m & + \ldots \\
\ldots & & & & & \\
\hline
s_0t_0 & + x\sum_{i=0}^{1} s_it_{1-i} & + x^2\sum_{i=0}^{2} s_it_{2-i} & + \ldots & + x^m\sum_{i=0}^{m} s_it_{m-i} & + \ldots
\end{array}$$

Tämän pohjalta voidaan polynomien tulo määritellä seuraavasti:

Määritelmä 2.2.5. Olkoot $\sigma = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, 0, 0, \ldots)$ ja $\tau = (t_0, t_1, t_2, \ldots, t_m, 0, 0, \ldots)$ polynomeja. Niiden tulopolynomi $\sigma\tau = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, missä $a_k = \sum_{i=0}^{k} s_it_{k-i}$.

Lemma 2.2.6. *1) Olkoot σ ja τ nollasta eroavia polynomeja kommutatiivisessa renkaassa R, siten että $deg(\sigma) = m$ ja $deg(\tau) = n$. Silloin tulopolynomin $\sigma\tau$ aste toteuttaa epäyhtälön*

$$deg(\sigma\tau) \leq m + n. \tag{2.1}$$

2) Jos R on kokonaisalue, silloin tulopolynomin $\sigma\tau$ asteelle pätee identiteetti:

$$deg(\sigma\tau) = m + n. \tag{2.2}$$

Samalla voidaan todeta, että $\sigma\tau \neq 0$.

Ennen lemman todistamista kerrataan käsite **nollanjakaja**. Olkoot $a, b \in R$. Jos $a \neq 0$ ja $b \neq 0$, voi niiden tulo muodostua nollaksi, jos R ei ole kokonaisalue. Tällöin a ja b ovat nollanjakajia.

Esimerkki 2.2.7. *Olkoot $R = \mathbb{Z}_{10}$, $a = [2]_{10}$ ja $b = [5]_{10}$. Nyt $a \neq 0$ ja $b \neq 0$, mutta $ab = [2]_{10} \cdot [5]_{10} = [10]_{10} = [0]_{10} = 0$.*

Todistus. 1) Polynomit σ ja τ eivät ole nollapolynomeja. Tulopolynomin kerroin $a_k = \sum_{i=0}^{k} s_i t_{k-i}$. Väitteen $\deg(\sigma\tau) \leq m+n$ todistamiseksi riittää osoittaa, että $a_k = 0$ aina, kun $k > m + n$.

Jos $i \leq m$, silloin $k - i > m + n - m = n$. Koska $\deg(\tau) = n$, on $t_{k-i} = 0$ aina, kun $k - i > n$. Niin ollen tulo $s_i t_{k-i} = 0$ aina, kun $i \leq m$.

Jos $i > m$, on $s_i = 0$, koska $\deg(\sigma) = m$. Taas tulo $s_i t_{k-i} = 0$ aina, kun $i > m$.

Näistä seuraa, että kertoimen a_k kaikki osatulot ovat nollia ja kerroin $a_k = 0$ ja $\deg(\sigma\tau) \leq m + n$ aina, kun $k > m + n$.

Jos $a_{m+n} \neq 0$, polynomin aste $\deg(\sigma\tau) = m + n$. Osatulot voivat olla nollia, vaikka kertoja ja kerrottava eivät olisikaan, sillä joukossa R voi olla nollanjakajia. Jos $a_{m+n} = 0$, polynomin aste $\deg(\sigma\tau) < m + n$. On myös mahdollista, että tulopoylynomi on nollapolynomi. Tällöinkin yhtälö 2.1 toteutuu, koska silloin $\deg(\sigma\tau) = -\infty < m + n$.

2) Edellinen todistus pätee siltä osin, että kerroin $a_k = 0$ ja $\deg(\sigma\tau) \leq m + n$ aina, kun $k > m + n$.

Nyt riittää osoittaa, että $a_{m+n} \neq 0$, jolloin $\deg(\sigma\tau) = m + n$ ja $\sigma\tau \neq 0$.

Jos $i < m$, silloin $k - i > m + n - m = n$. Koska $\deg(\tau) = n$, on $t_{k-i} = 0$ aina, kun $k - i > n$. Niin ollen tulo $s_i t_{k-i} = 0$, aina kun $i < m$.

Jos $i > m$, on $s_i = 0$, koska $\deg(\sigma) = m$. Nytkin tulo $s_i t_{k-i} = 0$ aina, kun $i > m$.

Jäljelle jää tilanne $i = m$. Silloin $k - i = m + n - m = n$ ja $s_i t_{k-i} = s_m t_n$. Nyt s_m ja t_n ovat polynomien johtavia kertoimia. Määritelmän 2.2.1 nojalla $s_m \neq 0$ ja $t_n \neq 0$ Koska R on kokonaisalue, siinä ei ole nollanjakajia. Nyt $a_{m+n} = s_m t_n \neq 0$. Väite seuraa tästä. □

2.3 Lukujonopolynomin ja perinteisen polynomin vastaavuus

Polynomin perinteiseen esitysmuotoon kuuluu olennaisena osana muuttuja, jota merkitään usein symbolilla x. Lukujonopolynomissa ei ole eikä tarvita muuttujia, on vain kertoimet. Voidaan kuitenkin tulkita, että x on mukana tässäkin esitysmuodossa. Se ei ole muuttuja, vaan lukujono

$$x = (0, 1, 0, 0, \ldots). \tag{2.3}$$

Tässä, kuten perinteisessäkin, esitysmuodossa x on siis polynomi.

Lemma 2.3.1. *1) Jos $\sigma = (s_0, s_1, \ldots, s_j, \ldots)$, niin*

$$x\sigma = (0, s_0, s_1, \ldots, s_j, \ldots). \tag{2.4}$$

2) Jos $n \geq 1$, silloin x^n on polynomi, jonka n:s kerroin (tulkiten siten, että ensimmäisen edellä on nollas) on 1 ja kaikki muut kertoimet nollia.

3) Jos $r \in R$, silloin

$$(r, 0, 0, \ldots)(s_0, s_1, \ldots, s_j, \ldots) = (rs_0, rs_1, \ldots, rs_j, \ldots). \tag{2.5}$$

Todistus. 1) Merkitään $x = (t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots)$, missä $t_1 = 1$ ja aina muulloin $t_i = 0$, ja $x\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots)$. Nyt $a_0 = t_0 s_0 = 0 \cdot s_0 = 0$. Kun $k \geq 1$, kertoimen $a_k = \sum_{i=0}^{k} s_i t_{k-i}$ summassa ainoa nollasta eroava tulo on $t_1 s_{k-1}$, koska kaikilla muilla indekseillä $t_i = 0$. Näin ollen $a_k = t_1 s_{k-1} = 1 \cdot s_{k-1} = s_{k-1}$. Toisin sanoen polynomissa $x\sigma$ on samat kertoimet kuin polynomissa σ, mutta ne ovat ykkösen verran suuremmilla indekseillä. Nollas kerroin on nolla. $x\sigma = (0, s_0, s_1, \ldots, s_j, \ldots)$ ja ensimmäinen väite on tosi.

2) Koska $x^1 = x = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, väite pätee, kun $n = 1$. Oletetaan, että väite pätee, kun $n = k - 1$. Jos tästä seuraa, että väite pätee myös silloin, kun $n = k$, on väite todistettu induktiolla kaikille n:n arvoille $n \geq 1$.

Kaikilla k-eksponentin arvoilla $x^k = xx^{k-1}$. Koska polynomissa x^{k-1} kerroin, jonka indeksi on $k-1$, on 1 ja muut kertoimet nollia ja x:llä kertominen siirtää samat kertoimet yhden pykälän oikealle ja laittaa alkuun nollan, tulokseksi tulee lukujono, jossa kerroin, jonka indeksi on k, on ykkönen ja kaikki muut kertoimet nollia. Tämä on väitteen mukainen lukujono. Väite 2 on siis tosi.

3) Merkitään $(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_j, \ldots)(s_0, s_1, \ldots, s_j, \ldots) = (a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots)$. Tällöin $r_0 = r$ ja $r_i = 0$ aina, kun $i \geq 1$. Nyt $a_k = \sum_{i=0}^{k} r_i s_{k-i} = r_0 s_k = rs_k$, koska kaikki muut osatulot ovat nollia silloin, kun $i \geq 1$. Tämän perusteella kolmaskin väite on tosi. $\square$

Kolmannen kohdan perusteella voidaan todeta, että lukujonolla $(r, 0, 0, \ldots)$ kertominen tuottaa saman tuloksen kuin luvulla r kertominen. Siksi voidaan tehdä samastus: $r = (r, 0, 0, \ldots), r \in R$.

Seuraavassa lauseessa rinnastetaan lukujonopolynomi ja perinteinen polynomi.

Lause 2.3.2. *Jos* $\sigma = (s_0, s_1, \ldots, s_n, 0, 0, \ldots)$, *niin* $\sigma = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \ldots + s_nx^n$, *missä jokainen kerroin* s_i *on yhtäpitävä polynomin* $(s_i, 0, 0, \ldots)$ *kanssa.*

Todistus. $\sigma = (s_0, s_1, \ldots, s_n, 0, 0, \ldots) = (s_0, 0, 0, \ldots) + (0, s_1, 0, \ldots) + \ldots + (0, 0, \ldots s_n, 0, 0, \ldots) = s_0(1, 0, 0, \ldots) + s_1(0, 1, 0, \ldots) + \ldots + s_n(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots) = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \ldots + s_nx^n$. □

Seuraus 2.3.3. *Polynomit* $f(x) = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \ldots + s_mx^m$ *ja* $g(x) = t_0 + t_1x + t_2x^2 + \ldots + t_nx^n$, *joiden asteet ovat vastaavasti* m *ja* n, *ovat keskenään yhtäsuuria täsmälleen silloin, kun* $m = n$ *ja* $s_i = t_i$ *kaikilla indeksin* i *arvoilla.*

Todistus. Lauseen 2.3.2 mukaan polynomi $f(x)$ vastaa lukujonopolynomia $\sigma = (s_0, s_1, \ldots, s_m, 0, 0, \ldots)$ ja polynomi $g(x)$ vastaavasti lukujonopolynomia $\tau = (t_0, t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots)$. Määritelmän 2.1.1 perusteella $\sigma = \tau$ täsmälleen silloin, kun $s_i = t_i$, kaikilla $i \geq 0$. Tällöin myös m on n. □

2.4 Polynomirengas

Olipa joukko R äärellinen tai ääretön, siinä voidaan luoda ääretön määrä polynomeja. Tämä johtuu siitä, ettei lukujonon pituutta ole määritelty.

Lause 2.4.1. *Olkoon* R *kommutatiivinen rengas. Kaikkien niiden polynomien joukkoa, joissa kertoimet ovat joukosta* R, *merkitään symbolilla* $R[x]$. *Nyt myös* $R[x]$ *on kommutatiivinen rengas ja* R *on sen alirengas. Lisäksi, jos* R *on kokonaisalue, myös* $R[x]$ *on kokonaisalue.*

Todistus. 1° Jotta $R[x]$ olisi kommutatiivinen rengas, tulee ryhmän $(R[x], +)$ olla Abelin ryhmä.

1. Binäärisyys: $\sigma + \tau \in R[x]$ aina, kun $\sigma, \tau \in R[x]$. Summapolynomin kertoimet $s_i + t_i \in R$, kun $s_i, t_i \in R$, koska R on kommutatiivinen rengas.

2. Assosiatiivisuus: $\rho + (\sigma + \tau) = (\rho + \sigma) + \tau$ kaikilla $\rho, \sigma, \tau \in R[x]$. Vasemman puolen summapolynomin kertoimet ovat $r_i + (s_i + t_i) = (r_i + s_i) + t_i$ eli oikean puolen summapolynomin kertoimet, koska $(R, +)$ on assosiatiivinen.

3. Neutraalialkio: Nolla-alkiona on nollapolynomi $0 \in R[x]$. $\sigma + 0 = 0 + \sigma = \sigma$, koska nollapolynomin kertoimet ovat R:n nolla-alkioita.

4. Vasta-alkio: Polynomin $\sigma = (s_0, s_1, \ldots, s_n, 0, 0, \ldots)$ vasta-alkio on $-\sigma = (-s_0, -s_1, \ldots, -s_n, 0, 0, \ldots)$. Onhan $\sigma + (-\sigma) = -\sigma + \sigma = 0$, koska vastinkertoimet ovat toistensa vasta-alkioita joukossa R.

5. Kommutatiivisuus: $\sigma + \tau = \tau + \sigma$ kaikilla $\sigma, \tau \in R[x]$. Summapolynomin kertoimet ovat summia, jotka ovat kommutatiivisia renkaassa R.

2° Toiseksi ryhmän $(R[x], \cdot)$ tulee olla monoidi ja kommutatiivinen.

1. Binäärisyys: $\sigma\tau \in R[x]$ aina, kun $\sigma, \tau \in R[x]$. Tulopolynomin kertoimet $a_k = \sum_{k=0}^{k} s_i t_{k-i} \in R$, kun $s_i, t_i \in R$, koska R on kommutatiivinen rengas ja siinä sekä yhteenlasku että kertolasku ovat binäärisiä.

2. Assosiatiivisuus: $\rho(\sigma\tau) = (\rho\sigma)\tau$ kaikilla $\rho, \sigma, \tau \in R[x]$. Tulopolynomin kertoimet saadaan käyttäen kaavasta muotoa $a_k = \sum_{i+j=k} s_i t_j$. Vasemman puolen kertoimet ovat $\sum_{i+j+k=l} r_i(s_j t_k)$, mistä saadaan ryhmän $(R, \cdot)$ assosiatiivisuuden nojalla $\sum_{i+j+k=l}(r_i s_j)t_k$ eli oikean puolen summapolynomin kertoimet.

3. Neutraalialkio: Ykkösalkiona on ykköspolynomi $1 \in R[x]$. $\sigma \cdot 1 = 1 \cdot \sigma = \sigma$. Ykköspolynomin nollas kerroin on 1, muut nollia. Siksi kertoimeksi a_k tulee $1 \cdot s_k = s_k$ eli polynomi pysyy samana kerrottiinpa se ykköspolynomilla kummasta suunnasta tahansa.

4. Kommutatiivisuus: $\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$ kaikilla $\sigma, \tau \in R[x]$. Tulopolynomin kertoimien osatulot ovat käännettävissä kommutatiivisessa renkaassa R. $a_k = \sum_{i+j=k} s_i t_j = \sum_{j+i=k} t_j s_i$

3° Lisäksi osittelulakien tulee olla voimassa.

1. $\rho(\sigma + \tau) = \rho\sigma + \rho\tau$ aina, kun $\rho, \sigma, \tau \in R[x]$.

$a_k = \sum_{i=0}^{k} r_i(s_{k-i}+t_{k-i}) = \sum_{i=0}^{k}(r_i s_{k-i}+r_i t_{k-i}) = \sum_{i=0}^{k} r_i s_{k-i}+\sum_{i=0}^{k} r_i t_{k-i}$

2. $(\rho + \sigma)\tau = \rho\tau + \sigma\tau$ aina, kun $\rho, \sigma, \tau \in R[x]$.

$a_k = \sum_{i=0}^{k}(r_i + s_i)t_{k-i} = \sum_{i=0}^{k}(r_i t_{k-i} + s_i t_{k-i}) = \sum_{i=0}^{k} r_i t_{k-i} + \sum_{i=0}^{k} s_i t_{k-i}$

Kaikki kommutatiivisen renkaan ehdot ovat voimassa, joten R[x] on kommutatiivinen rengas.

Renkaan R todistamiseksi renkaan $R[x]$ alirenkaaksi samastetaan $r \in R$ ja $(r, 0, 0, \ldots) \in R[x]$. Rengas R on renkaan $R[x]$ alirengas, jos seuraavat kolme ehtoa täyttyvät:

1. $s - t \in R$, jos $s, t \in R$.

$(s, 0, 0, \ldots) - (t, 0, 0, \ldots) = (s - t, 0, 0, \ldots) = s - t \in R$

2. $st \in R$, jos $s, t \in R$.

$(s, 0, 0, \ldots)(t, 0, 0, \ldots) = (st, 0, 0, \ldots) = st \in R$.

3. Renkailla $R[x]$ ja R on sama ykkösalkio.

$(1, 0, 0, \ldots) = 1$, joka on renkaan R ykkösalkio.

Alirengaskriteeri toteutuu, joten R on renkaan $R[x]$ alirengas.

$R[x]$ on kokonaisalue, jos siinä ei ole nollanjakajia. Olkoot σ ja τ nollasta eroavia polynomeja. Tällöin niiden tulo on lemman 2.2.6 mukaan erisuuri kuin nolla ja $R[x]$ on kokonaisalue. $\square$

2.5 Laajentamismahdollisuuksia

Polynomifunktio antaa mahdollisuuden käyttää muuttujaa. Jos R on kommutatiivinen rengas, jokainen polynomi $f(x) = s_0+s_1x+s_2x^2+\ldots+s_nx^n \in R$ määrittää polynomifunktion $f : R \to R$ seuraavasti: Jos $a \in R$, $f(a) = s_0 + s_1a + s_2a^2 + \ldots + s_na^n \in R$. Polynomifunktio ei ole sama asia kuin itse polynomi. Jos R on äärellinen rengas, esim. $\mathbb{Z}_m$, on olemassa vain äärellinen määrä funktioita, joissa R kuvautuu itseensä. Siis myös polynomifunktioita on silloin äärellinen määrä. Polynomeja sen sijaan on äärettömästi, onhan jokainen potenssi $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ ja niiden lineaariyhdistelmä erillinen ja muista eroava Seurauksen 2.3.3 nojalla.

Rationaalifunktioiden kunta antaa mahdollisuuden laajentaa polynomien laskutoimituksia jakolaskulla. Tällöin on otettava kommutatiivisen renkaan R sijaan kunta K.

Määritelmä 2.5.1. Olkoon K kunta ja $f(x), g(x)$ polynomeja. Tällöin **rationaalifunktioiden kunta** $K[x]$ sisältää kaikki osamäärät $K(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, missä $g(x) \neq 0$.

Edelleen polynomien teoriaa on mahdollista laajentaa **usean muuttujan polynomeihin**. Esimerkiksi polynomi $ax^2+bxy+cy^2+cx+ey+f \in R[x, y]$ voidaan kirjoittaa muotoon $cy^2 + (bx + e)y + (ax^2dx + f)$. Nähdään, että muuttujan y polynomin kertoimina ovat muuttujan x polynomit. Induktiolla muuttujien määrää voidaan lisätä.

Luku 3

Yhteenveto

Algebrassa polynomit voidaan tulkita lukujonoiksi, joissa on äärellinen määrä nollasta eroavia alkioita eli kertoimia. Kertoimet valitaan joukosta R, joka yhdessä yhteen- ja kertolaskun kanssa muodostaa kommutatiivisen renkaan. Lukujonon kertoimet indeksoidaan nollasta alkaen.

Polynomin $\sigma = (s_0, s_1, \ldots, s_n, 0, 0, \ldots)$ johtava kerroin on nollasta eroavista kertoimista se, jonka indeksi on suurin, s_n. Tämä indeksi n on samalla polynomin aste.

Lukujonopolynomista päästään perinteisen näköiseen polynomiin samastamalla x lukujonoon $(0, 1, 0, 0, \ldots)$. Kun tällä kerrotaan mikä tahansa polynomi, kerrottavan kaikki kertoimet siirtyvät yhden pykälän suuremmalle indeksille ja alkuun (nollaindeksille) tulee nolla. Näin $x^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, $x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, $x^4 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ jne. Tämän avulla päästään polynomien kahden esitysmuodon identtisyyteen:

$\sigma = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, 0, 0, \ldots) = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \ldots + s_nx^n$.

Kaikkien niiden polynomien joukkoa, jotka kommutatiivisessa renkaassa R voidaan muodostaa, kutsutaan polynomirenkaaksi $R[x]$. Tämä on todella osoitettavissa kommutatiiviseksi renkaaksi, ja R on sen alirengas. Polynomien algebraa voidaan laajentaa vielä esim. polynomifunktioihin, rationaalifunktioden kuntaan ja usean muuttujan polynomeihin.

Kirjallisuutta

[1] **Rotman, Joseph J.**, A First Course in Abstract Algebra, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000, 2. p.